TỔNG HỢP CÁC CÔNG THỨC LŨY THỪA CẦN NHỚ

1. Định nghĩa luỹ thừa

Số mũ α	Cơ số a	Luỹ thừa a^α
$\alpha = n \in N^*$	$a \in R$	$a^\alpha = a^n = a.a......a$ (n thừa số a)
$\alpha = 0$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^0 = 1$
$\alpha = -n (n \in N^*)$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$\alpha = \frac{m}{n} (m \in Z, n \in N^*)$	$a > 0$	$a^\alpha = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $(\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a)$
$\alpha = \lim r_n$ $(r_n \in Q, n \in N^*)$	$a > 0$	$a^\alpha = \lim a^{r_n}$

2. Tính chất của luỹ thừa

- Với mọi a > 0, b > 0 ta có:

$$a^\alpha.a^\beta = a^{\alpha+\beta} \quad ; \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta} \quad ; \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha.\beta}; \quad (ab)^\alpha = a^\alpha.b^\alpha \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

- $a > 1: \ a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta; \qquad 0 < a < 1: \ a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

- Với 0 < a < b ta có:

$$a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0; \qquad a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$$

Chú ý: *+ Khi xét luỹ thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số a phải khác 0.*

+ Khi xét luỹ thừa với số mũ không nguyên thì cơ số a phải dương.

3. Định nghĩa và tính chất của căn thức

- Căn bậc n của a là số b sao cho $b^n = a$.
- Với a, b ≥ 0, m, n ∈ N*, p, q ∈ Z ta có:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}; \ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b > 0); \qquad \sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p (a > 0); \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\text{Neáu } \frac{p}{n} = \frac{q}{m} \text{ thì } \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q} \ (a > 0); \text{ Đặc biệt } \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$$

- Nếu n là số nguyên dương lẻ và a < b thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

  Nếu n là số nguyên dương chẵn và 0 < a < b thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Chú ý:

+ Khi n lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n. Kí hiệu $\sqrt[n]{a}$.

+ Khi n chẵn, mỗi số thực dương a có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau.

Ví dụ: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{16^x}{16^x+4}$. Tính tổng $S=f\left(\dfrac{1}{2017}\right)+f\left(\dfrac{2}{2017}\right)+f\left(\dfrac{3}{2017}\right)+...+f\left(\dfrac{2017}{2017}\right)$.

A. $S=\dfrac{5044}{5}$. **B.** $S=\dfrac{10084}{5}$. **C.** $S=1008$. **D.** $S=\dfrac{10089}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Nhận xét: Cho $x+y=1$

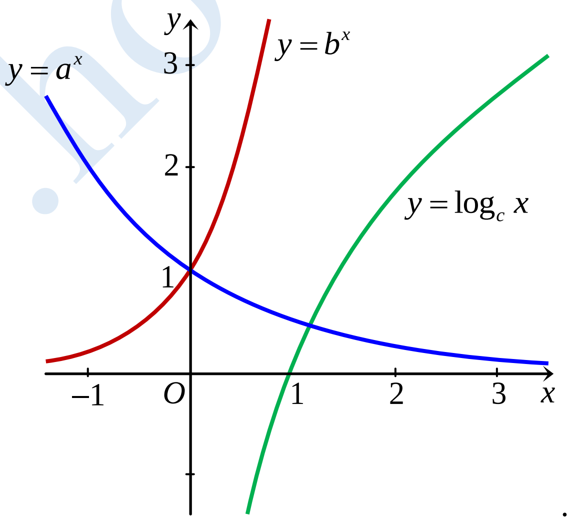
Ta có $f(x)+f(y)=\dfrac{16^x}{16^x+4}+\dfrac{16^y}{16^y+4}=\dfrac{16+4.16^x+16+4.16^y}{16+4.16^x+4.16^y+16}=1$

$$S=f\left(\frac{1}{2017}\right)+f\left(\frac{2016}{2017}\right)+f\left(\frac{2}{2017}\right)+f\left(\frac{2015}{2017}\right)+...+f\left(\frac{1008}{2017}\right)+f\left(\frac{1009}{2017}\right)+f\left(\frac{2017}{2017}\right)$$

$$=\underbrace{1+1+...+1}_{1008\ so\ hang}+\frac{16}{16+4}=1008+\frac{4}{5}=\frac{5044}{5}.$$

4. Bài tập

Câu 1: Trong hình vẽ dưới đây có đồ thị của các hàm số $y=a^x$, $y=b^x$, $y=\log_c x$.



Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây?

A. $c<a<b$. **B.** $a<c<b$. **C.** $b<c<a$. **D.** $a<b=c$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Từ đồ thị

Ta thấy hàm số $y=a^x$ nghịch biến $\Rightarrow 0<a<1$.

Hàm số $y=b^x, y=\log_c x$ đồng biến $\Rightarrow b>1, c>1$

$\Rightarrow a<b, a<c$ nên loại A, C

Nếu $b=c$ thì đồ thị hàm số $y=b^x$ và $y=\log_c x$ phải đối xứng nhau qua đường phân giác góc phần tư thứ nhất $y=x$. Nhưng ta thấy đồ thị hàm số $y=\log_c x$ cắt đường $y=x$ nên loại

D.

Câu 2: Cho bốn hàm số $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$ (1), $y=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$ (2), $y=4^x$ (3), $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ (4) có đồ thị là 4 đường cong theo phía trên đồ thị, thứ tự từ trái qua phải là $(C_1),(C_2),(C_3),(C_4)$ như hình vẽ bên.

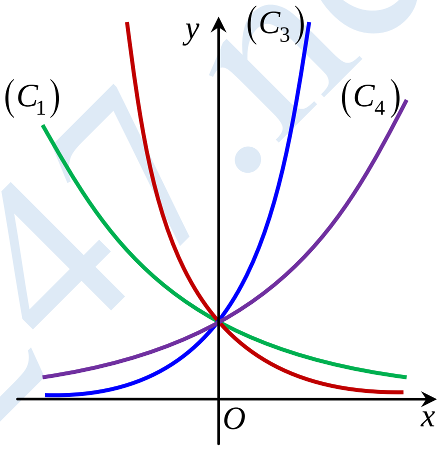
Tương ứng hàm số - đồ thị đúng là

A. $(1)-(C_2),(2)-(C_3),(3)-(C_4),(4)-(C_1)$.

B. $(1)-(C_1),(2)-(C_2),(3)-(C_3),(4)-(C_4)$.

C. $(1)-(C_4),(2)-(C_1),(3)-(C_3),(4)-(C_2)$.

D. $(1)-(C_1),(2)-(C_2),(3)-(C_3),(4)-(C_4)$.



Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$ và $y=4^x$ có cơ số lớn hơn 1 nên hàm đồng biến nên nhận đồ thị là (C_3) hoặc (C_4). Lấy $x=2$ ta có $\left(\sqrt{3}\right)^2<4^2$ nên đồ thị $y=4^x$ là (C_3) và đồ thị $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$ là (C_4).

Ta có đồ thị hàm số $y=4^x$ và $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ đối xứng nhau qua Oy nên đồ thị $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ là (C_2).

Còn lại (C_1) là đồ thị của $y=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$.

Vậy $(1)-(C_4),(2)-(C_1),(3)-(C_3),(4)-(C_2)$

Câu 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(20x^2+20x-1283\right)e^{40x}$ trên tập hợp các số tự nhiên là

A. -1283. **B.** $-163.e^{280}$. **C.** $157.e^{320}$. **D.** $-8.e^{300}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$y'=(40x+20)e^{40x}+\left(20x^2+20x-1283\right)40e^{40x}=\left(800x^2+840x-51300\right)e^{40x}$

$y'=0 \Rightarrow x=-\frac{342}{40}; x=\frac{300}{40}$.

Bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$	$-\frac{342}{40}$	$\frac{300}{40}=7,5$	$+\infty$
y'	$+$	$0 \quad -$	$0 \quad +$	

$y(7)=-163.e^{280}; y(8)=157.e^{320}$.

Vậy $\min y=-163.e^{280}$.

Câu 4: Cho hàm số $y=\left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^{x}+1}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

A. $3e^3+1\le m<3e^4+1$.

B. $m\ge 3e^4+1$.

C. $3e^2+1\le m\le 3e^3+1$.

D. $m<3e^2+1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

• $y'=\left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^{x}+1}.\ln\left(\frac{4}{2017}\right).\left(e^{3x}-(m-1)e^{x}+1\right)'=$

$y'=\left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^{x}+1}.\ln\left(\frac{4}{2017}\right).\left(3e^{3x}-(m-1)e^{x}\right)$

•Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)\Leftrightarrow$

$y'=\left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^{x}+1}.\ln\left(\frac{4}{2017}\right).\left(3e^{3x}-(m-1)e^{x}\right)\ge 0,\forall x\in(1;2)$ (*), mà

$\begin{cases}\left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^{x}+1}>0,\forall x\in\mathbb{R}\\ \ln\left(\frac{4}{2017}\right)<0\end{cases}$. Nên (*) $\Leftrightarrow 3e^{3x}-(m-1)e^{x}\le 0,\forall x\in(1;2)\Leftrightarrow$

$3e^{2x}+1\le m,\forall x\in(1;2)$

•Đặt $g(x)=3e^{2x}+1,\forall x\in(1;2)$, $g(x)=3e^{2x}.2>0,\forall x\in(1;2)$

x	1		2
$g'(x)$	|	+	|
$g(x)$	|	↗	|

. Vậy (*) xảy ra khi $m\ge g(2)\Leftrightarrow m\ge 3e^4+1$.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{e^x-m-2}{e^x-m^2}$ đồng biến trên khoảng $\left(\ln\dfrac{1}{4};0\right)$

A. $m\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]\cup[1;2)$ **B.** $m\in[-1;2]$

C. $m\in(1;2)$ **D.** $m\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\ln m^2\right\}$

Ta có $y'=\dfrac{(-m^2+m+2)e^x}{\left(e^x-m^2\right)^2}>0\Leftrightarrow -m^2+m+2>0\Leftrightarrow -1<m<2$ thì hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;\ln m^2\right)$ và $\left(\ln m^2;+\infty\right)$

Do đó để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\ln\dfrac{1}{4};0\right)$ thì $\left[\begin{array}{l}\ln m^2\le\dfrac{1}{4}\\ \ln m^2\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\dfrac{1}{2}\le m\le\dfrac{1}{2}\\ m\le -1\vee m\ge 1\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện $-1<m<2$ suy ra $m\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]\cup[1;2)$.

Câu 6: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{3^{-x}-3}{3^{-x}-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $m<\dfrac{1}{3}$. **B.** $m\le\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}<m<3$. **D.** $m<3$.

Hướng dẫn gải:

Đặt $t=3^{-x}$, với $x\in(-1;1)\longrightarrow t\in\left(\dfrac{1}{3};3\right)$.

Hàm số trở thành $y(t)=\dfrac{t-3}{t-m}\longrightarrow y'(t)=\dfrac{-m+3}{(t-m)^2}$.

Ta có $t'=-3^{-x}.\ln 3<0,\ \forall x\in(-1;1)$, do đó $t=3^{-x}$ **<u>nghịch biến</u>** trên $(-1;1)$.

Do đó YCBT $\longleftrightarrow y(t)$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3};3\right)\longleftrightarrow y'(t)>0,\ \forall t\in\left(\dfrac{1}{3};3\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m+3>0 \\ t-m\neq 0 \end{cases}, \forall t\in\left(\frac{1}{3};3\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m<3 \\ m\neq t \end{cases}, \forall t\in\left(\frac{1}{3};3\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m<3 \\ m\notin\left(\frac{1}{3};3\right) \end{cases} \Leftrightarrow m\leq\frac{1}{3}.$$

Chọn B.

Câu 7: Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $2^x = 3^y = 6^{-z}$. Giá trị của biểu thức $M = xy + yz + xz$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 6. **D.** 3.

Hướng dẫn giải:

Khi một trong ba số x, y, z bằng 0 thì các số còn lại bằng 0. Khi đó M=0.

Khi $x, y, z \neq 0$ ta đặt $2^x = 3^y = 6^{-z} = k$ suy ra $2 = k^{\frac{1}{x}}, 3 = k^{\frac{1}{y}}, 6 = k^{\frac{-1}{z}}$

Do 2.3=6 nên $k^{\frac{1}{x}}.k^{\frac{1}{y}} = k^{\frac{-1}{z}}$ hay $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{-1}{z}$.

Từ đó suy ra M=0

Chọn A.

Câu 8: Cho hai số $a,\ b$ dương thỏa mãn điều kiện: $a-b=\dfrac{a.2^b-b.2^a}{2^a+2^b}$. Tính $P=2017^a-2017^b$.

A. 0. **B.** 2016. **C.** 2017. **D.** -1.

Hướng dẫn gải:

Từ giả thiết, ta có $a-b=\dfrac{a.2^b-b.2^a}{2^a+2^b} \longleftrightarrow (a-b)\left(2^a+2^b\right)=a.2^b-b.2^a$.

$\longleftrightarrow a.2^a+a.2^b-b.2^a-b.2^b=a.2^b-b.2^a \Leftrightarrow a.2^a=b.2^b.\ (*)$

Xét hàm số $f(x)=x.2^x$ với $x>0$, có $f'(x)=2^x+x.2^x.\ln 2=2^x(1+x.\ln 2)>0;\ \forall x>0$.

Suy ra hàm số $f(x)$ là đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Nhận thấy $(*) \Leftrightarrow f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$.

Khi $a=b$ thì $2017^a-2017^b=2017^a-2017^a=0$.

Chọn A.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$. Tính giá trị biểu thức $A=f\left(\dfrac{1}{100}\right)+f\left(\dfrac{2}{100}\right)+...+f\left(\dfrac{100}{100}\right)$?

A. 50. **B.** 49. **C.** $\dfrac{149}{3}$. **D.** $\dfrac{301}{6}$.

Hướng dẫn giải:
Chọn D.

Cách 1. Bấm máy tính Casio fx 570 theo công thức $\sum_{X=1}^{100}\left(\frac{4^{\frac{X}{100}}}{4^{\frac{X}{100}}+2}\right)=\frac{301}{6}$.

Cách 2.Sử dụng tính chất $f(x)+f(1-x)=1$ của hàm số $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$. Ta có

$$A=\left[f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{99}{100}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{100}\right)+f\left(\frac{98}{100}\right)\right]+...+\left[f\left(\frac{49}{100}\right)+f\left(\frac{51}{100}\right)\right]+f\left(\frac{50}{100}\right)+f\left(\frac{100}{100}\right)$$

$$=49+\frac{4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}+2}+\frac{4}{4+2}=\frac{301}{6}$$

PS: Chứng minh tính chất của hàm số $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$.

Ta có $f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4}{4+2.4^x}=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{2}{2+4^x}=1$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$. Tính tổng $S=f\left(\frac{1}{2018}\right)+f\left(\frac{2}{2018}\right)+f\left(\frac{3}{2018}\right)+...+f\left(\frac{2017}{2018}\right)$.

A. $S=\frac{2017}{2}$. **B.** $S=2018$. **C.** $S=\frac{2019}{2}$. **D.** $S=2017$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $f(1-x)=\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{4}{4+2.4^x}=\frac{2}{2+4^x}\Rightarrow f(1)+f(1-x)=1$

Do đó: $f\left(\frac{1}{2018}\right)+f\left(\frac{2017}{2018}\right)=1,\ f\left(\frac{2}{2018}\right)+f\left(\frac{2016}{2018}\right)=1,...,\ f\left(\frac{1008}{2018}\right)+f\left(\frac{1010}{2018}\right)=1$

$\Rightarrow S=1008+\frac{1009}{2018}=\frac{2017}{2}$.

Vững vàng nền tảng, Khai sáng tương lai

Website **HOC247** cung cấp một môi trường **học trực tuyến** sinh động, nhiều **tiện ích thông minh**, nội dung bài giảng được biên soạn công phu và giảng dạy bởi những **giáo viên nhiều năm kinh nghiệm, giỏi về kiến thức chuyên môn lẫn kỹ năng sư phạm** đến từ các trường Đại học và các trường chuyên danh tiếng.

I. Luyện Thi Online

Học mọi lúc, mọi nơi, mọi thiết bi – Tiết kiệm 90%

- **Luyện thi ĐH, THPT QG:** Đội ngũ **GV Giỏi, Kinh nghiệm** từ các Trường ĐH và THPT danh tiếng xây dựng các khóa **luyện thi THPTQG** các môn: Toán, Ngữ Văn, Tiếng Anh, Vật Lý, Hóa Học và Sinh Học.
- **Luyện thi vào lớp 10 chuyên Toán:** Ôn thi **HSG lớp 9** và **luyện thi vào lớp 10 chuyên Toán** các trường *PTNK, Chuyên HCM (LHP-TĐN-NTH-GĐ), Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An* và các trường Chuyên khác cùng *TS.Trần Nam Dũng, TS. Phạm Sỹ Nam, TS. Trịnh Thanh Đèo và Thầy Nguyễn Đức Tấn.*

II. Khoá Học Nâng Cao và HSG

Học Toán Online cùng Chuyên Gia

- **Toán Nâng Cao THCS:** Cung cấp chương trình Toán Nâng Cao, Toán Chuyên dành cho các em HS THCS lớp 6, 7, 8, 9 yêu thích môn Toán phát triển tư duy, nâng cao thành tích học tập ở trường và đạt điểm tốt ở các kỳ thi HSG.
- **Bồi dưỡng HSG Toán:** Bồi dưỡng 5 phân môn **Đại Số, Số Học, Giải Tích, Hình Học** và **Tổ Hợp** dành cho học sinh các khối lớp 10, 11, 12. Đội ngũ Giảng Viên giàu kinh nghiệm: *TS. Lê Bá Khánh Trình, TS. Trần Nam Dũng, TS. Phạm Sỹ Nam, TS. Lưu Bá Thắng, Thầy Lê Phúc Lữ, Thầy Võ Quốc Bá Cẩn* cùng đôi HLV đạt thành tích cao HSG Quốc Gia.

III. Kênh học tập miễn phí

HOC247 NET cộng đồng học tập miễn phí
HOC247 TV kênh Video bài giảng miễn phí

- **HOC247 NET:** Website hoc miễn phí các bài học theo **chương trình SGK** từ lớp 1 đến lớp 12 tất cả các môn học với nội dung bài giảng chi tiết, sửa bài tập SGK, luyện tập trắc nghiệm mễn phí, kho tư liệu tham khảo phong phú và cộng đồng hỏi đáp sôi động nhất.
- **HOC247 TV:** Kênh **Youtube** cung cấp các Video bài giảng, chuyên đề, ôn tập, sửa bài tập, sửa đề thi miễn phí từ lớp 1 đến lớp 12 tất cả các môn Toán- Lý - Hoá, Sinh- Sử - Địa, Ngữ Văn, Tin Học và Tiếng Anh.