GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

I. Lý thuyết chung

1. Đối với phương trình chứa tham số

Xét phương trình $f(x,m) = g(m)$, (1)

B1: Lập luận số nghiệm phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị (C): $y = f(x,m)$ và đường thẳng d: $y = g(m)$.

B2: Lập bảng biến thiên cho hàm số $y = f(x,m)$

B3: Kết luận: * phương trình có nghiệm: $\min_{x\in D} f(x,m) \le g(m) \le \max_{x\in D} f(x,m)$.

* phương trình có k nghiệm: d cắt (C) tại k điểm.

* phương trình vô nghiệm khi: d không cắt (C) .

2. Đối với bất phương trình chứa tham số

$f(x) \le g(m)$ với mọi $x \in D \Leftrightarrow g(m) \ge \max_{x\in D} f(x)$

$f(x) \le g(m)$ có nghiệm khi và chỉ khi $g(m) \ge \min_{x\in D} f(x)$

$f(x) \ge g(m)$ với mọi $x \in D \Leftrightarrow g(m) \le \min_{x\in D} f(x)$

$f(x) \ge g(m)$ có nghiệm khi và chỉ khi $g(m) \le \max_{x\in D} f(x)$

Ví dụ: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình:

$\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

A. $m \le 9$. **B.** $m \ge \frac{9}{2}$. **C.** $-1 < m$. **D.** $m \le 7$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1 \quad (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge -\frac{1}{2} \\ 3x^2 + 4x - 1 = mx \quad (2) \end{array}\right. \quad (*)$

Nhận xét:

$x = 0$ không phải là nghiệm của (2). Do vậy, ta tiếp tục biến đổi: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ \frac{3x^2 + 4x - 1}{x} = m \quad (3) \end{cases}$

Bài toán trở thành tìm m để (3) có 2 nghiệm thực phân biệt:

$x \in \left[-\frac{1}{2};+\infty\right) \setminus \{0\}$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{3x^2+4x-1}{x}$ với $x \in \left[-\frac{1}{2};+\infty\right) \setminus \{0\}$. Ta có:

$f'(x)=\frac{3x^2+1}{x^2}>0, \forall x \in \left[-\frac{1}{2};+\infty\right) \setminus \{0\}$

BBT

X	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	+	
$f(x)$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy với $m \ge \frac{9}{2}$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt.

Chọn B.

II. Bài tập

Câu 1: Phương trình $2017^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thực trong $[-5\pi;2017\pi]$?

A. vô nghiệm. **B.** 2017. **C.** 2022. **D.** 2023.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Ta có hàm số $y=2017^{\sin x}-\sin x-\sqrt{2-\cos^2 x}$ tuần hoàn với chu kỳ $T=2\pi$.

Xét hàm số $y=2017^{\sin x}-\sin x-\sqrt{2-\cos^2 x}$ trên $[0;2\pi]$.

Ta có

$$y'=\cos x.2017^{\sin x}.\ln 2017-\cos x-\frac{2\sin x.\cos x}{2\sqrt{2-\cos^2 x}}=\cos x.\left(2017^{\sin x}.\ln 2017-1-\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)$$

Do vậy trên $[0;2\pi]$, $y'=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2} \vee x=\frac{3\pi}{2}$.

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2017-1-\sqrt{2}>0;\ y\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{2017}-1-\sqrt{2}<0$$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\searrow$	$y\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	$\nearrow$	0

Vậy trên $\left[0;2\pi\right]$ phương trình $2017^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

Ta có $y\left(\pi\right)=0$, nên trên $\left[0;2\pi\right]$ phương trình $2017^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}$ có ba nghiệm phân biệt là $0,\ \pi,\ 2\pi$.

Suy ra trên $\left[-5\pi;2017\pi\right]$ phương trình có đúng $2017-\left(-5\right)+1=2023$ nghiệm.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m\sqrt{2+\tan^2 x}=m+\tan x$ có ít nhất một nghiệm thực.

A. $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$. **B.** $-1<m<1$. **C.** $-\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}$. **D.** $-1<m<1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$pt \Leftrightarrow m=\frac{\tan x}{\sqrt{2+\tan^2 x}-1}$$

Đặt $\tan x=t\Rightarrow m=\dfrac{t}{\sqrt{2+t^2}-1}$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{t}{\sqrt{2+t^2}-1}\Rightarrow f'\left(t\right)=\dfrac{2-\sqrt{2+t^2}}{\sqrt{2+t^2}.\left(\sqrt{2+t^2}-1\right)^2}=0\Leftrightarrow t=\pm\sqrt{2}$

Lập BBT với $\lim\limits_{t\to+\infty} f\left(t\right)=1, \lim\limits_{t\to-\infty} f\left(t\right)=-1, f\left(-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}, f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\Rightarrow m\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Câu 3: Giá trị của m để phương trình $x+\sqrt{2x^2+1}=m$ có nghiệm là:

A. $m\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $m<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $m\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $m>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Đặt $f(x)=x+\sqrt{2x^2+1} \Rightarrow f'(x)=1+\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}=-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$

Bảng biến thiên

Vậy, $m \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2\sqrt{x+1}=x+m$ có nghiệm thực?

A. $m\ge 2$. **B.** $m\le 2$. **C.** $m\ge 3$. **D.** $m\le 3$.

Chọn A.

Chọn B.

Đặt $t=\sqrt{x+1}, t\ge 0$. Phương trình thành: $2t=t^2-1+m \Leftrightarrow m=-t^2+2t+1$

Xét hàm số $f(t)=-t^2+2t+1, t\ge 0; f'(t)=-2t+2$

Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1		2		$-\infty$

Từ đó suy ra phương trình có nghiệm khi $m\le 2$.

Câu 5: Phương trình $x^3+x(x+1)=m(x^2+1)^2$ có nghiệm thực khi và chỉ khi:

A. $-6\le m\le -\dfrac{3}{2}$. **B.** $-1\le m\le 3$. **C.** $m\ge 3$. **D.** $-\dfrac{1}{4}\le m\le \dfrac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Sử dụng máy tính bỏ túi.

$$x^3+x(x+1)=m(x^2+1)^2 \Leftrightarrow mx^4-x^3+(2m-1)x^2-x+m=0$$

Chọn $m=3$ phương trình trở thành $3x^4-x^3+5x^2-x+3=0$ (không có nghiệm thực) nên loại đáp án B, **C.**

Chọn $m=-6$ phương trình trở thành $-6x^4-x^3-13x^2-x-6=0$ (không có nghiệm thực) nên loại đáp án **A.**

Kiểm tra với $m=0$ phương trình trở thành $-x^3-x^2-x=0 \Leftrightarrow x=0$ nên chọn đáp án **D.**

Tự luận

Ta có $x^3+x(x+1)=m(x^2+1)^2 \Leftrightarrow m=\dfrac{x^3+x^2+x}{x^4+2x^2+1}$ (1)

Xét hàm số $y=\dfrac{x^3+x^2+x}{x^4+2x^2+1}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$$y'=\frac{(x^3+x^2+x)'(x^4+2x^2+1)-(x^3+x^2+x)(x^4+2x^2+1)'}{(x^4+2x^2+1)^2}$$

$$=\frac{(3x^2+2x+1)(x^4+2x^2+1)-(x^3+x^2+x)(4x^3+4x)}{(x^4+2x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-x^6-2x^5-x^4+x^2+2x+1}{(x^4+2x^2+1)^2}$$

$$=\frac{(-x^4+1)(x^2+2x+1)}{(x^4+2x^2+1)^2}$$

$$y'=0 \Leftrightarrow (-x^4+1)(x^2+2x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$	$\dfrac{3}{4}$	$\searrow$	0

Phương trình (1) có nghiệm thực khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3+x^2+x}{x^4+2x^2+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1}{4} \le m \le \dfrac{3}{4}$.

Chọn D.

Câu 6: Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{m+x-x^2}$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m\in\left[5;\dfrac{23}{4}\right]$. **B.** $m\in[5;6]$. **C.** $m\in\left(5;\dfrac{23}{4}\right)\cup\{6\}$. **D.** $m\in\left[5;\dfrac{23}{4}\right)\cup\{6\}$.

Hướng dẫn giải:

+) $\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{m+x-x^2}$ (1)

Điều kiện: $-1\le x\le 2$

+) $(1)\Leftrightarrow 3+2\sqrt{-x^2+x+2}=-x^2+x+m$

Đặt: $-x^2+x=t$; $f(x)=-x^2+x$; $f'(x)=-2x+1$

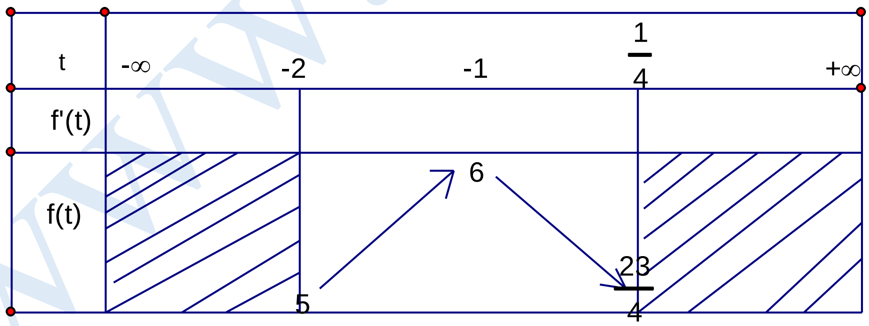
$f(-1)=2,\ f(2)=-2,\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}\Rightarrow t\in\left[-2;\dfrac{1}{4}\right]$

$(1)\Leftrightarrow 3+2\sqrt{t+2}=t+m\Leftrightarrow 2\sqrt{t+2}=t+m-3\Leftrightarrow m=2\sqrt{t+2}+3-t$

Đặt $f(t)=2\sqrt{t+2}+3-t$

$f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t+2}}-1=\dfrac{1-\sqrt{t-2}}{\sqrt{t-2}}$. $f'(t)=0\Rightarrow 1-\sqrt{t-2}=0\Leftrightarrow t=-1$

Bảng biến thiên



+) $-x^2+x=t\Leftrightarrow -x^2+x-t=0$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=1-4t>0\Leftrightarrow t\le\dfrac{1}{4}$

Do đó để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì phương trình $(*)$ có nghiệm $t\in\left[-2;\dfrac{1}{4}\right]$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow m \in [5;6]$.

Chọn B.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình: $m\sqrt{x^2-2x+2}+m+2x-x^2 \le 0$ có nghiệm $x \in \left[0;1+\sqrt{3}\right]$.

A. $m \le \frac{2}{3}$. **B.** $m \le -1$. **C.** $m \ge \frac{2}{3}$. **D.** $m \le 0$.

Hướng dẫn giải:

Bpt $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-2x+2}+1\right)+x(2-x) \le 0 \Leftrightarrow m \le \dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2-2x+2}+1}, (1)$

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+2} \Rightarrow x^2-2x=t^2-2$.

Ta xác đinhk ĐK của t:

Xét hàm số $t=\sqrt{x^2-2x+2}$ với $x \in \left[0;1+\sqrt{3}\right]$, ta đi tìm ĐK ràng buộc của t.

Ta có: $t'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}, t'=0 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy với $x \in \left[0;1+\sqrt{3}\right]$ thì $1 \le t \le 2$.

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow m \le \dfrac{t^2-2}{t+1}$ với $t \in [1;2]$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-2}{t+1}$ với $t \in [1;2]$. Ta có: $f'(t)=\dfrac{t^2+2t+2}{(t+2)^2}>0, \forall x \in [1;2]$. Vậy hàm số f tăng trên [1;2].

Do đó, yêu cầu của bài toán trở thành tìm m để (1) có nghiệm $t \in [1;2]$

$\Leftrightarrow m \le \max\limits_{t\in[1;2]} f(t) = f(2) = \dfrac{2}{3}$.

Vậy $m \le \dfrac{2}{3}$ thì pt có nghiệm.

Chọn A.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2-4x+5}=m+4x-x^2$ có đúng 2 nghiệm dương?

A. $1 \le m \le 3$. **B.** $-3<m<\sqrt{5}$. **C.** $-\sqrt{5}<m<3$. **D.** $-3 \le m<3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Đặt $t=f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$. Ta có $f'(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$. $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$

Xét $x>0$ ta có bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\sqrt{5}$	↘	1	↗	$+\infty$

Khi đó phương trình đã cho trở thành $m=t^2+t-5\Leftrightarrow t^2+t-5-m=0$ (1).

Nếu phương trình (1) có nghiệm t_1,t_2 thì $t_1+t_2=-1$. (1) có nhiều nhất 1 nghiệm $t\ge 1$.

Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm dương khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $t\in\left(1;\sqrt{5}\right)$. Đặt $g(t)=t^2+t-5$. Ta đi tìm m để phương trình $g(t)=m$ có đúng 1 nghiệm $t\in\left(1;\sqrt{5}\right)$. Ta có $g'(t)=2t+1>0,\forall t\in\left(1;\sqrt{5}\right)$.

Bảng biến thiên:

t	1		$\sqrt{5}$
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	-3	↗	$\sqrt{5}$

Từ bảng biến thiên suy ra $-3<m<\sqrt{5}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình:

$m\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+2\right)=2\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$ có nghiệm.

A. $m\le\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{2}-1\le m\le 1$. **C.** $m\ge 1$. **D.** $m\le 1$.

Hướng dẫn giải:

ĐK: $x\in[-1;1]$.

Đặt $t=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$. Với $x\in[-1;1]$, ta xác định ĐK của t như sau:

Xét hàm số $t=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$ với $x\in[-1;1]$.

Ta có:

$t'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1-x^4}}$, cho $t'=0 \Leftrightarrow x=0$

Ta có $t(-1)=\sqrt{2}, t(0)=0, t(1)=\sqrt{2}$

Vậy với $x\in[-1;1]$ thì $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$

Từ $t=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2\sqrt{1-x^4}=2-t^2$.

Khi đó pt đã cho tương đương với: $m(t+2)=-t^2+t+2 \Leftrightarrow \frac{-t^2+t+2}{t+2}$

Bài toán trở thành tìm m để phương trình $\frac{-t^2+t+2}{t+2}=m$ có nghiệm $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{-t^2+t+2}{t+2}$ với $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Ta có: $f'(t)=\frac{-t^2-4t}{(t+2)^2}<0, \forall t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$

Suy ra: $\max\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]} f(t)=f(0)=1, \min\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]} f(t)=f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}-1$.

Bây giờ yêu cầu bài toán xảy ra khi: $\min\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]} f(t)\le m\le \max\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]} f(t) \Leftrightarrow \sqrt{2}-1\le m\le 1$

Vậy với $\sqrt{2}-1\le m\le 1$ thảo yêu cầu bài toán.

Chọn B.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* sao cho bất phương trình:

$3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$ (1) có nghiệm.

A. $m\le\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{2}-1\le m\le 1$. **C.** $-1<m\le\frac{1}{3}$. **D.** $m\le -1$.

Hướng dẫn giải:

ĐK xác định của phương trình: $x\ge 1$.

Khi đó:

$(1)\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+m=2\sqrt[4]{\frac{x^2-1}{(x+1)^2}} \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+m=2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$ (2)

Đặt $t=2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}, (t\ge 0)$. Vì $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt[4]{1-\frac{2}{x+1}}<1$ nên t<1.

Vậy với $x\ge 1$ thì $0\le t<1$

Khi đó, $(2) \Leftrightarrow 3t^2 + m = 2t \Leftrightarrow -3t^2 + 2t = m, (3)$.

Bây giờ bài toán trở thành tìm m để (3) có nghiệm $t \in [0;1)$.

Xét hàm số $f(t) = -3t^2 + 2t$ trên khoảng $[0;1)$. Ta có:

$f'(t) = -6t + 2, f'(t) = 0 \Leftrightarrow -6t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

BBT

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$f'(t)$	$+$	0	$-$
$f(t)$	$0 \nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow -1$

Vậy với $-1 < m \le \frac{1}{3}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn C.