CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM TRONG THỰC TẾ

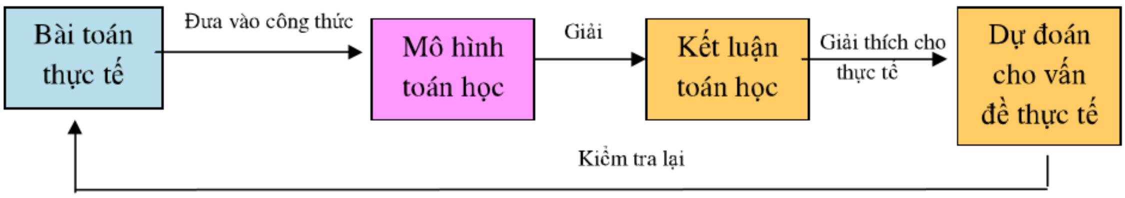
1. Phương pháp

Qua tìm hiểu, tổng hợp và phân tích, tác giả nhận thấy các bài toán thực tế liên quan đến việc sự dụng đạo hàm có thể chia thành 2 phần lớn:

Một là, các bài toán thực tế đã được mô hình hóa bằng một hàm số toán học. Qua các ví dụ minh họa sau đây, tác giả sẽ chỉ ra cho bạn đọc những dạng toán thường gặp là gì ? Các lĩnh vực khoa học khác đã ứng dụng đạo hàm như thế nào trong việc giải quyết bài toán mà họ đã đặt ra ?

Hai là, các bài toán thực tế mà mô hình thực tiễn chưa chuyển về mô hình toán học. Như chúng ta biết, để có thể ứng dụng đạo của hàm số thì trước tiên ta phải "thiết lập được hàm số". Như vậy ta có thể mô tả quy trình mô hình hóa dưới đây

Hình sau đây mô tả quá trình của việc mô hình hóa toán học cho một hiện tượng trong thực tế



Ta có thể cụ thể hóa 3 bước của quá trình mô hình hóa như sau:

Bước 1: Dựa trên các giả thiết và yếu tố của đề bài, ta xây dựng mô hình Toán học cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả "dưới dạng ngôn ngữ Toán học" cho mô hình mô phỏng thực tiễn. Lưu ý là ứng với vấn đề được xem xét có thể có nhiều mô hình toán học khác nhau, tùy theo các yếu tố nào của hệ thống và mối liên hệ giữa chúng được xem là quan trọng ta đi đến việc biểu diễn chúng dưới dạng các biến số, tìm các điều kiện tồn tại của chúng cũng như sự ràng buộc, liên hệ với các giả thiết của đề bài.

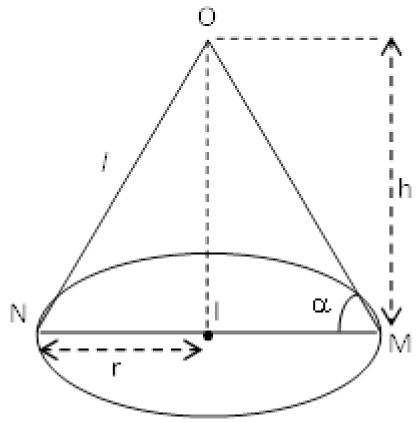
Bước 2: Dựa vào các kiến thức liên quan đến vấn đề thực tế như trong kinh tế, đời sống, trong khoa học kỹ thuật như Vật lý, Hóa học, Sinh học,... Ta thiết lập hoàn chỉnh hàm số phụ thuộc theo một biến hoặc nhiều biến. (Ở đây trong nội dung đang xét ta chỉ xét với tính huống 1 biến).

Bước 3: Sử dụng công cụ đạo hàm của hàm số để khảo sát và giải quyết bài toán hình thành ở bước 2. Lưu ý các điều kiện ràng buộc của biến số và kết quả thu được có phù hợp với bài toán thực tế đã cho chưa .

Ví dụ: Cần phải đặt một ngọn đèn điện ở phía trên và chính giữa một cái bàn hình tròn có bán kính r. Hỏi phải treo ở độ cao h là bao nhiêu để mép bàn được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C được biểu thị bởi công thức $C = k\frac{\sin\alpha}{l^2}$ (α là góc nghiêng giữa tia sáng và mép bàn, k - hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng.

■ Phân tích:

- Gọi các ký hiệu l, M, N, O, I như hình vẽ.



Ta cần tìm cường độ chiếu sáng lớn nhất trong khi đó biểu thức $C = k\dfrac{sin\alpha}{l^2}$ phụ thuộc vào góc α và chiều dài l. Do đó ta sẽ cần tìm một đẳng thức quan hệ giữa 2 biến trên thông qua hằng số (bất biến). Ở đây hằng số đó chính là r (bán kính hình tròn của cái bàn).

- Dựa vào hình vẽ, ta có $sin\alpha = \dfrac{h}{l}$.

Đồng thời $h^2 = l^2 - r^2$ Điều đó có nghĩa là $C = k\dfrac{\sqrt{l^2 - r^2}}{l^3}\left(l > r\right)$

- Bài toán trở thành tìm $\max\limits_{r\in(0;l)} f\left(l\right) = ?$

Hướng dẫn giải.

Gọi h là độ cao của đèn so với mặt bàn ($h > 0$).

Các ký hiệu l, M, N, O, I như hình vẽ.

Ta có $sin\alpha = \dfrac{h}{l}$ và $h^2 = l^2 - r^2 \Rightarrow$ cường độ sáng là $C = k\dfrac{\sqrt{l^2 - r^2}}{l^3}\left(l > r\right)$

Đặt $f\left(l\right) = k\dfrac{\sqrt{l^2 - r^2}}{l^3}$. Bài toán trở thành tìm $\max\limits_{r\in(0;l)} f\left(l\right) = ?$

Ta có: $f'\left(l\right) = k\dfrac{\dfrac{l^4}{\sqrt{l^2 - r^2}} - 3l^2\sqrt{l^2 - r^2}}{l^6} = kl^2\dfrac{l^2 - 3\left(l^2 - r^2\right)}{l^8\sqrt{l^2 - r^2}}$

Cho $f'\left(l\right) = 0 \Leftrightarrow l^2\left(3r^2 - 2l^2\right) = 0 \Leftrightarrow l = r\sqrt{\dfrac{3}{2}} > r$.

Lập bảng biến thiên ta thấy

l	0	r	$r\sqrt{\frac{3}{2}}$	l
$f'(x)$	‖	$+$	0 $-$	‖
$f(x)$	‖	↗	max ↘	‖

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\max\limits_{r\in(0;l)} f(l) = f\left(r\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

Và khi đó $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{\frac{3}{2}r^2-r^2}=\frac{r\sqrt{2}}{2}$.

2. Bài tập

Bài toán 1. Từ một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước là $a\times b$ với $a<b$. Người ta cắt bỏ 4 hình vuông bằng nhau ở 4 góc rồi gò thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Hỏi cạnh của hình vuông cắt đi phải bằng bao nhiêu để hình hộp đó có thể tích lớn nhất ?

Hướng dẫn giải.

● Gọi x là cạnh của hình vuông cắt đi, ta phải có điều kiện $0<x<\frac{a}{2}$.

Khi đó thể tích hình hộp là $V=x(a-2x)(b-2x)=4x^3-2(a+b)x^2+abx=V(x)$.

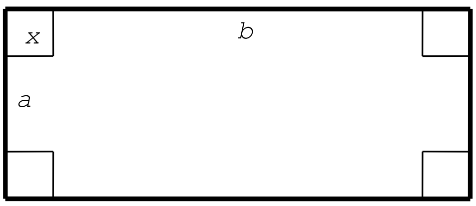
● Bài toán trở thành tìm $\max\limits_{x\in\left(0;\frac{a}{2}\right)} V(x)=?$

Đạo hàm $V'=f'(x)=12x^2-4(a+b)x+ab$.

Ta có $\Delta'=4(a+b)^2-12ab=4\left(a^2-ab+b^2\right)>0$ với mọi $a,\ b$.

Do đó $V'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt

$$x_1=\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}<x_2=\frac{a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}.$$



Theo định lý Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{a+b}{3}>0 \\ x_1x_2=\dfrac{ab}{12}>0 \end{cases}$

suy ra $0<x_1<x_2$.

Hơn nữa, ta có $V'\left(\frac{a}{2}\right)=f'\left(\frac{a}{2}\right)=a^2-ab=a\left(a-b\right)<0$. Do đó $0<x_1<\frac{a}{2}<x_2$.

Bảng biến thiên

x	0		x_1		$\frac{a}{2}$
$V'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$V(x)$	‖	↗	max	↘	‖

● Dựa vào bảng biến thiên ta thấy V đạt giá trị lớn nhất khi

$$\boxed{x=x_1=\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}.}$$

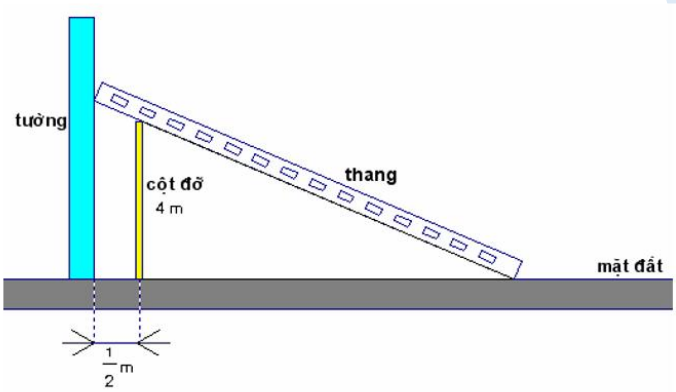
Bài toán 2. Tìm chiều dài bé nhất của cái thang để nó có thể tựa vào tường và mặt đất, ngang qua cột đỡ cao 4 m, song song và cách tường 0,5m kể từ gốc của cột đỡ.

A. xấp xỉ bằng $5,4902\ m$.

B.xấp xỉ bằng $5,602\ m$.

C. xấp xỉ bằng $5,5902\ m$.

C.xấp xỉ bằng $6,5902\ m$.



Hướng dẫn giải.

● Đặt $HC=x>0\Rightarrow BC=x+0,5$. Theo định lý Thales ta có $\frac{HC}{BC}=\frac{MH}{AB}=\frac{x}{x+0,5}$

Do đó ta có $AB=\frac{4\left(x+0,5\right)}{x}$.

Do ΔABC vuông tại $B\Rightarrow AC^2=AB^2+BC^2=\left(x+0,5\right)^2+\frac{16\left(x+0,5\right)^2}{x^2}$

● Hay $AC^2=\frac{\left(x+0,5\right)^2\left(x^2+16\right)}{x^2}$ Đặt $f\left(x\right)=\frac{x^4+x^3+\frac{65}{4}x^2+16x+4}{x^2}\left(x>0\right)$.

Bài toán trở thành tìm $min\, f\left(x\right)=?$ với $x>0$.

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{\left(4x^3+3x^2+\dfrac{65}{2}x+16\right)x^2-2x\left(x^4+x^3+\dfrac{65}{4}x^2+16x+4\right)}{x^4}$

$\Leftrightarrow f'\left(x\right)=\dfrac{2x^4+x^3-16x-8}{x^3}$.

Cho $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(2x+1\right)\left(x^2+2x+4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2>0\\ x=-\dfrac{1}{2}<0\left(loai\right)\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta có:

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	‖	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	‖

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{x>0} f\left(x\right)=f\left(2\right)=\dfrac{125}{4}$

Do đó ta có $min\, AC=\sqrt{\dfrac{125}{4}}=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}\approx 5,5902$. Đáp án C

Bài toán 3. Cần phải xây dựng một hố ga, dạng hình hộp chữ nhật có thể tích V (m^3) không đổi, hệ số $k>0$ cho trước (k là tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy. Hãy xác định các kích thước của đáy để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

Hướng dẫn giải.

● Gọi $x,y\left(0<x<y\right)$ lần lượt là chiều rộng và chiều dài của đáy hố ga.

Gọi h là chiều cao của hố ga $\left(h>0\right)$.

● Theo đề bài ta có $h=kx$ và $V=hxy\Rightarrow y=\dfrac{V}{hx}=\dfrac{V}{kx^2}$

Để tiết kiệm nguyên vật liệu nhất ta cần tìm các kích thước sao cho diện tích toàn phần của hố ga là nhỏ nhất.

Khi đó ta có: $S_{tp}=2xh+2yh+2xy=2x\left(kx\right)+2\left(kx\right).\dfrac{V}{kx^2}+2x\dfrac{V}{kx^2}$

Suy ra $S_{tp} = 2kx^2 + \dfrac{2\left(\dfrac{k+1}{k}\right)V}{x}$ Xét hàm số $f(x) = 2kx^2 + \dfrac{2\left(\dfrac{k+1}{k}\right)V}{x}$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ với $x > 0$.

$f'(x) = 4kx - \dfrac{2\left(\dfrac{k+1}{k}\right)V}{x^2} = 2\dfrac{2k^2x^3 - (k+1)V}{kx^2}$, cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_o = \sqrt[3]{\dfrac{(k+1)V}{2k^2}} > 0$

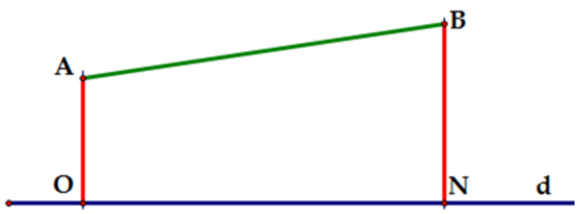
Lập bảng biến thiên ta có

x	0		x_o		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(x_o)$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{x>0} f(x) = f\left(\sqrt[3]{\dfrac{(k+1)V}{2k^2}}\right)$.

Khi đó $y = \sqrt[3]{\dfrac{4kV}{(k+1)^2}}$ và $h = \sqrt[3]{\dfrac{k(k+1)V}{2}}$.

Bài toán 4. Có hai vị trí A, B nằm về cùng phía đối với bờ sông (d) như hình vẽ. Khoảng cách từ A đến bờ sông là $30\,m$. Khoảng cách từ B đến bờ sông là $45\,m$. Khoảng cách giữa A và B là $5\sqrt{409}\ m$. Một người đi từ A đến bờ sông (phía A, B) để lấy nước sau đó đi về vị trí B. Hỏi đoạn đường tối thiểu người đó đi từ A đến B (có ghé qua bờ sông) là bao nhiêu (đơn vị m) ?



Hướng dẫn giải.

● Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BN.

Dựa vào hình vẽ ta có $ON = AH = \sqrt{AB^2 - (BN - HN)^2} = 100$

Gọi M là vị trí mà người đó đi từ A đến bờ sông, đặt $OA = x(m)$ $(0 < x < 100)$

Khi đó ta có đoạn đường tối thiểu mà người đó phải đi là:

$$S = AM + MB = \sqrt{OA^2 + OM^2} + \sqrt{MN^2 + MB^2} \Rightarrow S = \sqrt{x^2 + 30^2} + \sqrt{(100 - x)^2 + 45^2}$$

Đặt $f(x) = \sqrt{x^2 + 30^2} + \sqrt{(100-x)^2 + 45^2}$ với $(0 < x < 100)$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ với $0 < x < 100$

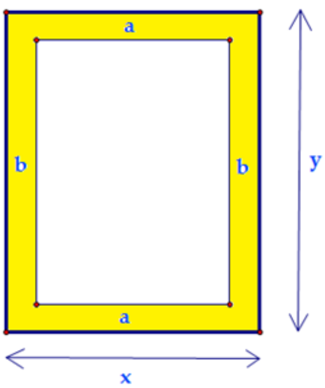
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 30^2}} + \frac{-(100 - x)}{\sqrt{12015 - 200x + x^2}}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 40(tm) \\ x = -200(ktm) \end{array}\right.$$

Khi đó lập bảng biến thiên ta có

x	0		40		100
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	125	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $minS = \min\limits_{x \in (0;100)} f(x) = f(40) = 125\ m$

Bài toán 5. Có một cơ sở in sách xác định rằng: Diện tích của toàn bộ trang sách là $S(cm^2)$. Do yêu cầu kỹ thuật nên dòng đầu và dòng cuối đều phải cách mép (trên và dưới) trang sách là $a(cm)$. Lề bên trái và bên phải cũng phải cách mép trái và mép phải của trang sách là $b(cm)(b < a)$ được mô tả như hình vẽ. Các kích thước của trang sách là bao nhiêu để cho diện tích phần in các chữ có giá trị lớn nhất. Khi đó hãy xác định tỷ số các kích thước của trang sách.



Hướng dẫn giải.

● Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều dài của trang sách $(0 < x < y)$ và đồng thời P là diện tích phần in chữ của trang sách.

Khi đó chiều rộng phần in sách sẽ là $x - 2b, \left(b < \frac{x}{2}\right)$

Và chiều dài phần in sách sẽ là $y-2a,\left(a<\frac{y}{2}\right)$

● Theo đề bài ta có: $P=(x-2b)(y-2a)\ (*)$

Mặt khác, $S=xy\Rightarrow y=\frac{S}{x}$, thay vào (*) ta được $P=(x-2b)\left(\frac{S}{x}-2a\right)$

Suy ra $P=S+4ab-\left(2ax+\frac{2bS}{x}\right)$

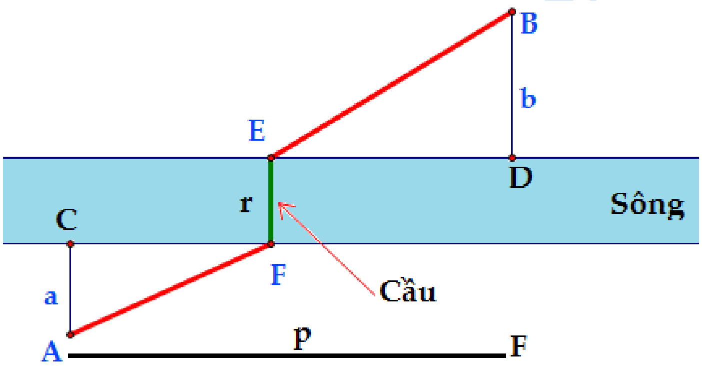
● Đặt $f(x)=2ax+\frac{2bS}{x}$ với $x>0$. Ta nhận thấy $max\,P\Leftrightarrow min\,f(x)$

$f'(x)=2a-\frac{2bS}{x^2}, f'(x)=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{bS}{a}}$.

Và đồng thời $f''(x)=\frac{4bS}{x^2}>0\ \Rightarrow\ \min_{x\in(0;+\infty)} f(x)=f\left(\sqrt{\frac{bS}{a}}\right)=4\sqrt{abS}$.

Khi đó $x=\sqrt{\frac{bS}{a}}, y=\sqrt{\frac{aS}{b}}\Rightarrow\frac{y}{x}=\frac{S}{x^2}=\frac{a}{b}>1$

Bài toán 6. Một con đường được xây dựng giữa hai thành phố A và B. Hai thành phố này bị ngăn cách bởi một con sông có chiều rộng là $r(km)$. Người ta cần xây 1 cây cầu bắt qua sông biết rằng A cách con sông một khoảng bằng $a(km)$, B cách con sông một khoảng bằng $b(km)$ $(0<a\le b)$ như hình vẽ. Hãy xác định vị trí xây cầu EF (theo hình vẽ) để tổng khoảng cách giữa hai thành phố là nhỏ nhất ?



Hướng dẫn giải.

● Đặt $AF=p$ và $CF=x\Rightarrow ED=p-x(0<x<p)$.

Khoảng cách giữa hai thành phố sẽ là $S=AF+EF+EB=\sqrt{x^2+a^2}+r+\sqrt{(p-x)^2+b^2}$

Đặt $S(x)=\sqrt{x^2+a^2}+r+\sqrt{(p-x)^2+b^2}$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $S(x)$ với $0<x<p$

Khi đó $S'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\dfrac{x-p}{\sqrt{b^2+(p-x)^2}}$.

$$S'(x)=0 \Leftrightarrow x\sqrt{b^2+(p-x)^2}=(p-x)\sqrt{x^2+a^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2\left[b^2+(p-x)^2\right]=(p-x)^2\left(x^2+a^2\right) \Leftrightarrow \left(a^2-b^2\right)x^2-2a^2px+a^2p^2=0\ (*)$$

Xét $\Delta'=a^4p^2-a^2p^2\left(a^2-b^2\right)=a^2p^2b^2>0$

Do đó $pt(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{a^2p-apb}{a^2-b^2}=\dfrac{ap}{a+b}\in(0;p) \\ x=\dfrac{a^2p+apb}{a^2-b^2}=\dfrac{ap}{a-b}(ktm) \end{array}\right.$

Mặt khác $S''(x)=\dfrac{a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{b^2}{\left(b^2+(p-x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}>0, \forall x\in(0;p)$

Do đó $minS(x)=S\left(\dfrac{ap}{a+b}\right)$.

Vậy để khoảng cách giữa hai thành phố là ngắn nhất thì $x=\dfrac{ap}{a+b}$.

Bài toán 7. Giả sử bạn là chủ của một xưởng cơ khí vừa nhận được một đơn đặt hàng là thiết kế một bồn chứa nước hình trụ có nắp với dung tích 20 lít. Để tốn ít nguyên vật liệu nhất, bạn sẽ chọn giá trị nào cho độ cao bồn nước trong các giá trị dưới đây ?

A.0,3 mét. B. 0,4 mét. C. 0,5 mét. D. 0,6 mét.

Hướng dẫn giải.

● Gọi $\mathrm{r},\mathrm{h}(\mathrm{r},\mathrm{h}>0)$ lần lượt bán kính đáy và chiều cao của khối trụ. Khi đó ta có

$$V=\pi r^2h \Rightarrow h=\frac{V}{\pi r^2}.$$

● Để ít tốn nguyên vật liệu nhất, ta cần tìm r sao cho diện tích toàn phần của khối trụ nhỏ nhất.

Do đó $S_{tp}=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r\dfrac{V}{\pi r^2}=2\pi\left(r^2+\dfrac{V}{\pi r}\right)$.

● Xét hàm số $f(r)=r^2+\dfrac{V}{\pi r}$. Bài toán trở thành tìm $\min\limits_{r>0} f(r)=?$

Ta có: $f'(r)=2r-\dfrac{V}{\pi r^2}, f'(r)=0 \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}} \Rightarrow h=\sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$.

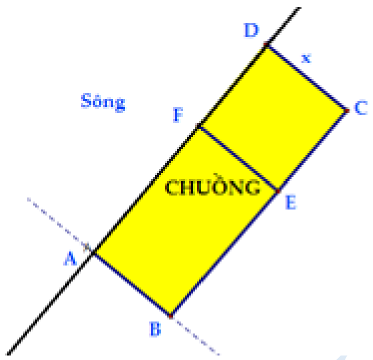
Lập bảng biến thiên, ta có:

r	0		$\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$		$+\infty$
$f'(r)$	||	$-$	0	$+$	||
$f(r)$	||	$\searrow$	$f\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)$	$\nearrow$	||

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{r>0} f(r) = f\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)$.

Khi đó $h = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}} = \sqrt[3]{\dfrac{4.20}{\pi}} \approx 2,94(dm) = 0,29m$. Đáp án A

Bài toán 8. Một chủ trang trại nuôi gia cầm muốn rào thành 2 chuồng hình chữ nhật sát nhau và sát một con sông, một chuồng nuôi gà và một chuồng nuôi vịt. Biết rằng đã có sẵn 240 m hàng rào. Hỏi diện tích lớn nhất có thể bao quanh chuồng là bao nhiêu ?



Hướng dẫn giải.

● Xét hình chữ nhật $ABCD$ như hình vẽ, và đặt $AB = x\,(x > 0)$.

Khi đó $BC = 240 - 3x > 0 \Rightarrow x < 80$.

Diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ là $S = x(240 - 3x) = 240x - 3x^2$

● Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ với $0 < x < 80$

Xét $f(x) = 240x - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 240 - 6x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 40$

Do $f''(x) = -6 < 0, \forall x \in (0;80)$.

Do đó $maxS = \max\limits_{x\in(0;80)} f(x) = f(40) = 4800 \Leftrightarrow x = 40$.

Vậy diện tích lớn nhất có thể bao quanh là $4800m^2$.

HOC247

Vững vàng nền tảng, Khai sáng tương lai

Website **HOC247** cung cấp một môi trường **học trực tuyến** sinh động, nhiều **tiện ích thông minh**, nội dung bài giảng được biên soạn công phu và giảng dạy bởi những **giáo viên nhiều năm kinh nghiệm, giỏi về kiến thức chuyên môn lẫn kỹ năng sư phạm** đến từ các trường Đại học và các trường chuyên danh tiếng.

I. Luyện Thi Online

Học mọi lúc, mọi nơi, mọi thiết bi – Tiết kiệm 90%

- **Luyện thi ĐH, THPT QG:** Đội ngũ **GV Giỏi, Kinh nghiệm** từ các Trường ĐH và THPT danh tiếng xây dựng các khóa **luyện thi THPTQG** các môn: Toán, Ngữ Văn, Tiếng Anh, Vật Lý, Hóa Học và Sinh Học.
- **Luyện thi vào lớp 10 chuyên Toán:** Ôn thi **HSG lớp 9** và **luyện thi vào lớp 10 chuyên Toán** các trường *PTNK, Chuyên HCM (LHP-TĐN-NTH-GĐ), Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An* và các trường Chuyên khác cùng *TS.Trần Nam Dũng, TS. Phạm Sỹ Nam, TS. Trịnh Thanh Đèo và Thầy Nguyễn Đức Tấn.*

II. Khoá Học Nâng Cao và HSG

Học Toán Online cùng Chuyên Gia

- **Toán Nâng Cao THCS:** Cung cấp chương trình Toán Nâng Cao, Toán Chuyên dành cho các em HS THCS lớp 6, 7, 8, 9 yêu thích môn Toán phát triển tư duy, nâng cao thành tích học tập ở trường và đạt điểm tốt ở các kỳ thi HSG.
- **Bồi dưỡng HSG Toán:** Bồi dưỡng 5 phân môn **Đại Số, Số Học, Giải Tích, Hình Học** và **Tổ Hợp** dành cho học sinh các khối lớp 10, 11, 12. Đội ngũ Giảng Viên giàu kinh nghiệm: *TS. Lê Bá Khánh Trình, TS. Trần Nam Dũng, TS. Phạm Sỹ Nam, TS. Lưu Bá Thắng, Thầy Lê Phúc Lữ, Thầy Võ Quốc Bá Cẩn* cùng đôi HLV đạt thành tích cao HSG Quốc Gia.

III. Kênh học tập miễn phí

HOC247 NET cộng đồng học tập miễn phí
HOC247 TV kênh Video bài giảng miễn phí

- **HOC247 NET:** Website hoc miễn phí các bài học theo **chương trình SGK** từ lớp 1 đến lớp 12 tất cả các môn học với nội dung bài giảng chi tiết, sửa bài tập SGK, luyện tập trắc nghiệm mễn phí, kho tư liệu tham khảo phong phú và cộng đồng hỏi đáp sôi động nhất.
- **HOC247 TV:** Kênh **Youtube** cung cấp các Video bài giảng, chuyên đề, ôn tập, sửa bài tập, sửa đề thi miễn phí từ lớp 1 đến lớp 12 tất cả các môn Toán- Lý - Hoá, Sinh- Sử - Địa, Ngữ Văn, Tin Học và Tiếng Anh.